

What's fun in EE

臺大電機系科普系列



電腦可以做什麼有趣的事？

曾雪峰／國立臺灣大學光電所暨電機工程學系教授

用「計算」來從事科學研究，這不算是個新興領域， π 值大家應該很熟悉吧？這個重要的常數，在日常生活中處處可見（只要是圓形的東西，都和 π 值有關）。中國古代的祖沖之推算出圓周率的值介於 3.1415926 和 3.1415927 之間。這個準確至 7 位小數的 π 值的紀錄保持了將近十個世紀，到十五世紀才被打破。利用數學計算的方法來求 π 值，應該是人類早期的計算科學吧？（提到 π 值，有個非常容易的方法，可以讓你以現有桌上的個人電腦，就能很輕易的計算 π 值喔！我們在此先介紹一下背景知識，後面再跟各位介紹～。）

從古至今，「計算科學」的發展，十分緩慢，直到最近半個世紀。原因很容易理解，畢竟大量的計算古代只能仰賴手算，是非常累人又耗時的。到了早期計算機的出現，才開始有機器能將大量運算用機械來處理。當時的計算機是用真空管組成的，體積很大，整部電腦大約堆砌而成如房間大小，可想而知耗電量驚人。



圖 1 早期的電腦（圖片擷取自網路）



臺灣大學電機工程學系

10617 台北市 大安區 羅斯福路四段一號

Email: dept@cc.ee.ntu.edu.tw

http://www.ee.ntu.edu.tw/



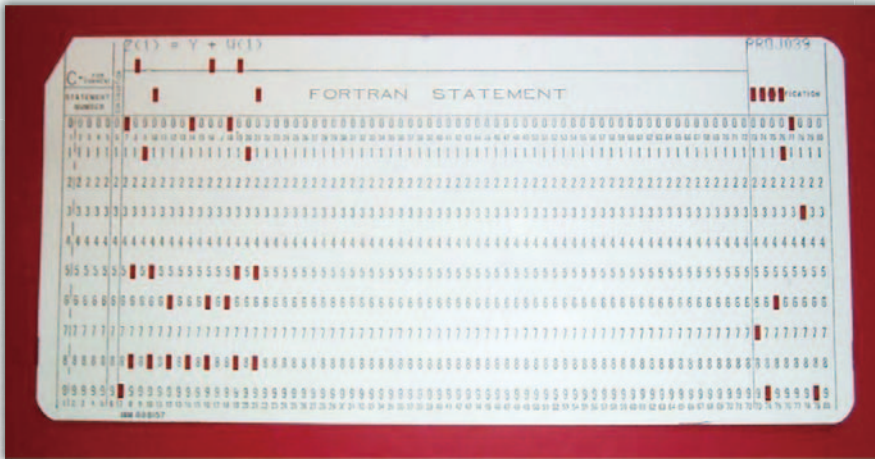


圖 2 早期需要用打洞的卡片來下指令給電腦（圖片擷取自網路）

近半個世紀電腦技術的快速發展，從 Steve Jobs and Steve Wozniak 推出的 Apple I, II 時代的桌上型個人電腦（記憶體只有 48KB），到今天的一部輕薄短小的筆電（記憶體有 $\sim 4\text{GB}$ ，粗略估計增加了將近十萬倍！），其計算能力早已遠遠超過昔日大如房間的祖父級電腦了。



圖 3 (a) 1976 的相思木裡的 Apple I（圖片擷取自 Wikipedia）
(b) 1980 年代的 Apple II 桌上型個人電腦（圖片擷取自網路）

早期的電腦，除了需要用電腦語言才能溝通之外，還需要用電腦卡片，電腦才「看」得懂。人們為了使用電腦還需要「打卡」，將程式打成一張張卡片，「輸入」電腦，才能執行。（這種早期人和電腦的溝通方式，在《Surely you're joking, Mr. Feynman!》《別鬧了，費曼先生》（天下出版）一書中有提到。）而現在的耳熟能詳的程式語言如：C++，Java 等等，已經是屬於高階語言，亦即和我們日常生活所用的語言相去不遠，容易理解學習。以現在的普及的個人電腦計算能力與記憶量，「計算科學」才算得到一個大展長才的機會。

我們在這裡要介紹一個很有意思的「數值模擬方法」，叫做「蒙第卡羅法（Monte Carlo method）」。這是一個非常淺顯易懂的方法，利用你的筆電或桌電，就可以輕易地計算 π 值。





Monte Carlo method

「蒙第卡羅 (Monte Carlo) 法」大約在 1948 年時，由 Nick Metropolis 所提出，是利用亂數以統計學的觀念來定量地解問題的方法。由於以「亂數」的概念為中心，因此 Metropolis 以二次世界大戰當時 Monaco 的一家他叔叔常去的賭場 Monte Carlo Casino 命名，而沿用至今。在計算機出現以前，這個方法牽涉到非常大量的計算以致於實用困難，除非絕對必要，否則鮮少被使用。現在「蒙第卡羅法」使用的領域非常廣泛，舉凡基因工程、股市預測、生醫光學研究等等，都可以有「蒙第卡羅法」的應用。

那要如何用「亂數」來計算 π 值呢？給各位一個提示，這個方法叫做：「The poor dart-thrower」（飛鏢丟不準的人）。可能的話，讀到這裡，請你停下來一會兒，好好地想一想，亂數跟 π 值如何可以扯上關係？（自己想出來的，遠比別人告訴你的有價值！）

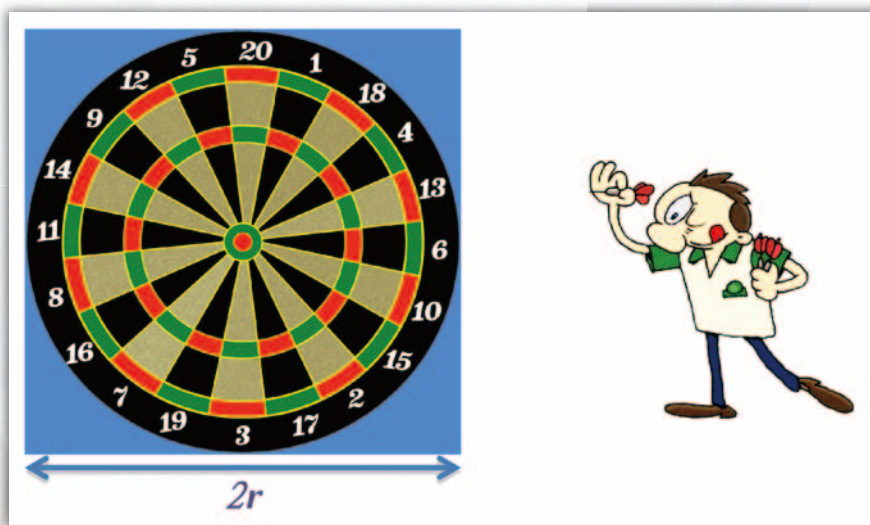


圖 4 以一個完全沒準度的射手而言，飛鏢落在靶上的機率與靶的面積成正比。(圖片擷取自網路)

這個概念很單純，想像有個人每次丟飛鏢，的確能射到正方形的區域內，但是否能落在靶上，卻完全無法控制。果真如此，我們可以假設：

假設 #1：飛鏢落在正方形之內任何地方的機率均等。

假設 #2：飛鏢落在靶內的機率正比於靶的面積。

也就是說，飛鏢落在靶上的機率是正比於靶面積的大小：

$$\text{Probability \{ 飛鏢落在靶上 \}} \sim \frac{\text{Area of Target}}{\text{Area of Square}} = \frac{\pi \cdot r^2}{(2 \cdot r)^2}$$

很有意思的是，這時亂數就和 π 值扯上關係了。也就是說，在**假設 #1** 的前提之下，投擲飛鏢可以用來估算 π 值！



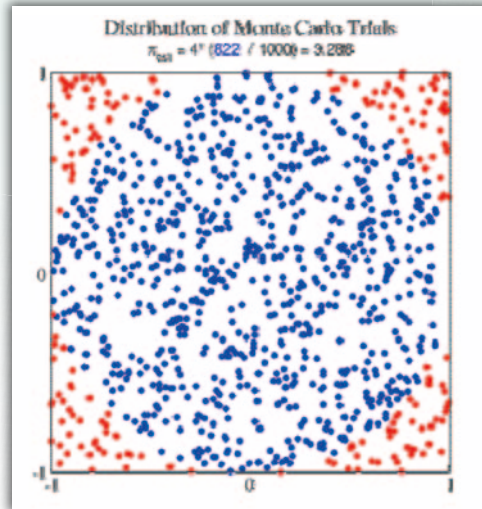


圖 5 Example of 投擲 1000 次飛鏢。藍色是落在靶上的飛鏢，紅色則是落在靶外的飛鏢（圖片擷取自網路）

```
inside= 0;  
outside= 0;  
N= 3000;  
for n= 1:N  
    x= rand (1);  
    y= rand (1);  
    if sqrt ((x-0.5) ^2 + (y-0.5) ^2) <= 0.5  
        inside= inside+1;  
    else  
        outside= outside+1;  
    end  
end  
fprintf ('pi=%u\n', 4 * inside/(inside+outside))
```

圖 6 Matlab program for calculating π with 3,000 darts

想當然爾，光投擲一次來估算 π 值，應該是很不準的。如果投擲很多次飛鏢，多次平均，這個估計應該可以越來越準確，計算 π 值的精確度越高。當然，亂數的產生越「隨機」也會使的計算越正確。如圖 7 是一個實際用「蒙第卡羅法」計算的結果，以十萬次估算出來約為 3.14134。如果以十億次的亂數估算出 π 值約為 3.14159848，與正確的 π 值相比，大約準確到小數點後第五位。由於亂數不同，就好像每次射飛鏢落點不同，每次計算結果也不全然相同。

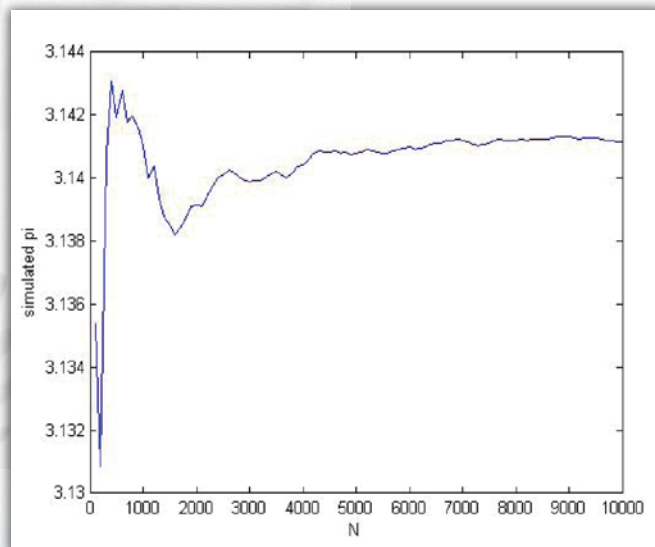


圖 7 蒙第卡羅法以十萬個亂數估算的 π 值





與其他估算 π 值的數值方法比起來，「蒙第卡羅法」是一個觀念很容易了解及使用的方法，只需要很簡單的程式基礎，用自己家裡的電腦，就可以算。以一般的個人電腦，大約只需要跑幾分鐘，估算出來的 π 值精確度就能輕易超越祖沖之多年努力的成果喔～。

除了計算 π 值以外，「計算科學」是可以做一些非常有趣的事喔！（你能想像是什麼嗎？）把電腦計算的能力應用在自然界的物理定律的預測與描述，我們可以很「正確地」模仿自然界的物理、化學等現象，就是所謂的「電腦模擬」！讓我們來看幾個典型的例子～：

近年來的電影特效越做越誇張，可是卻又看起來很逼真！例如：電影 X 戰警，把金門大橋連根拔起（Golden Gate Bridge destroyed in X-Men），把潛水艇從水中凌空漂浮起來（Magneto levitates a submarine out of the water），更不用說變形金剛系列電影，機械人變身，把以建築聞名的芝加哥市一棟棟摩天大樓打得爛爛的等等。（精彩圖片，在網路很容易找到。）

為什麼這些特效會看起來「很像」真的呢？特別是如果你看看二十年前老電影的特效，就會有「怎麼差這麼多？電影技術真的進步了～」的感覺，新的特效比起老電影的特效真是好的太多了！這些都是用「計算科學」模擬出來的成果！因為利用了數值方法，把電影裡的物品，以符合自然運動定律的特性適當地呈現出來，模擬一些假想的情況。如果這些物品以符合運動定律的方式來移動，看起來就會很真了。

大家應該可以想像，除了電影或電玩特效方面之外，「數值計算」一個重要的應用是在「科學研究發展方面」。以電腦模擬（Simulation）分析問題，在很多很多的領域都被廣泛的運用。就模擬原理來說，Simulation 大致可以分為「直觀的模擬（Heuristic Simulation）」與「嚴謹的模擬（Rigorous Simulation）」兩類。嚴謹的模擬顧名思義可以知道這是精確模擬的方法。大家可能會覺得奇怪，為什麼會有「不精確」的模擬呢？簡單地說，以往由於模擬的困難度，例如說當問題太複雜，太多變數，現有的計算機速度不夠快或記憶容量不夠大時，只好提出一種「折衷」的辦法，將問題簡化，使得能夠用當時的工具來計算。然而這個「簡化的版本」，常常沒有嚴謹的理論根據，乃是根據「直觀想像」來簡化問題，其物理特性或被扭曲，或甚至忽略。這樣的方法，雖然「物理意義」與「準確度」有待商榷，但在人類科學發展過程，卻扮演著重要的角色。「計算不夠快、記憶容量不足」等技術性的問題，以今日電腦科技快速的發展的趨勢，很多困難都會隨時間迎刃而解。科學研究精神重在嚴謹、精確，因此，在這裡我們只討論精確嚴謹的模擬方法（Rigorous Simulation）。

日常生活等實際的問題，常常牽涉到大量的變因，比起教科書習題、考試等單純化的題目，困難複雜得多。例如：我們想要了解光在某個特定情況下會如何傳播？要分析這樣的光學問題，首先要知道光是電磁波的一種，因此必須要倚賴電磁學的基本原理：馬克士威方程式（Maxwell's equations）。（電學與磁學中的法拉第定律、安培定律、高斯定律等等，都是屬於馬克士威方程式的一部分。）因此，要精確地分析描述光的特性與傳播方式，最正確的方式是解馬克士威方程式：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

圖 8 電磁學的基本原理：馬克士威方程式（Maxwell's equations）





不幸的是，就如同你所見，要解這些看似「深奧幽玄」的聯立偏微分方程式通常是很困難的。問問學過電磁學的朋友你就會知道，人類有能力精確求解的電磁學問題只有非常非常少的幾個「理想化」的簡單特例，譬如說：點電荷啦，無限長直導線，無窮大的平面，正球體，正球殼等等。基本上，我們人類頭腦簡單，只知道如何算幾種「簡單的幾何形狀」，稍微複雜一點，我們就不會精確地算了。

那怎麼辦呢？難道電磁學的問題只能用來考試，沒有實際用途？感謝今天電腦科技的快速發展，自從 James C. Maxwell 提出電磁學的基本方程式，直到最近數十年，利用電腦與「數值計算方法」，在虛擬空間中，建構虛擬實驗來幫助分析了解真實世界中的物理現象，我們人類才第一次有機會能用馬克士威方程式 (Maxwell's equations) 來做一些很複雜、實際問題的精確計算分析。

以電腦模擬一個「虛擬空間」(virtual space)，簡單地說，就是以電腦的記憶體來記錄、描述這個虛擬空間中每個點的物理性質，並且「要求」在此虛擬空間中，所有點都互相滿足基本的物理定律。例如說要模擬「自由落下的蘋果」，其基本的物理定律就是牛頓運動定律與萬有引力定律。

若以「光學研究」為例，我們今天要探討在圖 9 情況下光會如何傳播，那基本物理定律就是馬克士威方程式 (Maxwell's equations)。有時候有更複雜的情況，例如牽涉光學又牽涉到力學，那就需要把光學與力學的基本定律都一一考慮進來。既然在這個虛擬空間中所有的物體都（被要求）滿足自然界的基本物理原理，那讓時間流動，則可以想見，在這個虛擬空間中所描述的現象，就會和自然界中的真實情況一樣！我們就可以藉由這個虛擬的實驗來探討、分析自然界中的問題。也許你有疑問，既然自然界就可以做實驗了，那這個虛擬的實驗以什麼好處呢？實際實驗常常有量測上的限制與誤差、雜訊等實際的困難，而這個虛擬的實驗，基本上所有在電腦記憶體中的物理量都是可以精確得到的。更重要的，這個虛擬的實驗有點像是個「很理想的實驗」，可以做到「無雜訊」、「超高精確度」等實際技術上所難以達到的。數值模擬方法有所謂的：時域有限差分法 (Finite-Difference Time-Domain Method)，有限元素分析法 (Finite Element Method) 等等，都可以用來建構滿足基本物理方程式的虛擬實驗。虛擬實驗是以數值方法把物理定律解析解「具象化」的研究方法。某方面來說，它可以比實驗更接近理論的理想值。更重要的是，「虛擬實驗」可以精確分析以往所沒辦法處理的「不規則結構」等複雜的實際問題！

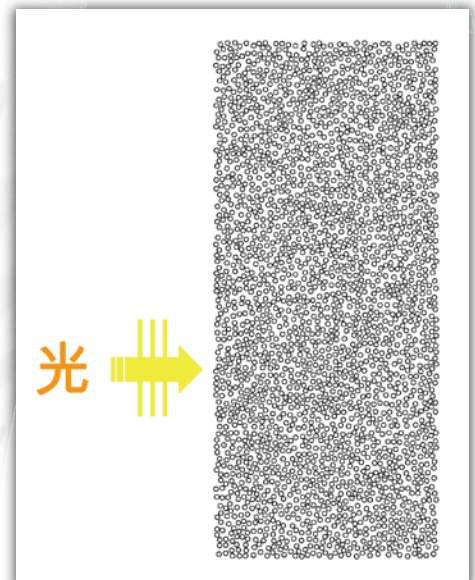


圖 9 光照在不規則的結構會經過多次的干涉、繞射、折射、反射等複雜的現象。

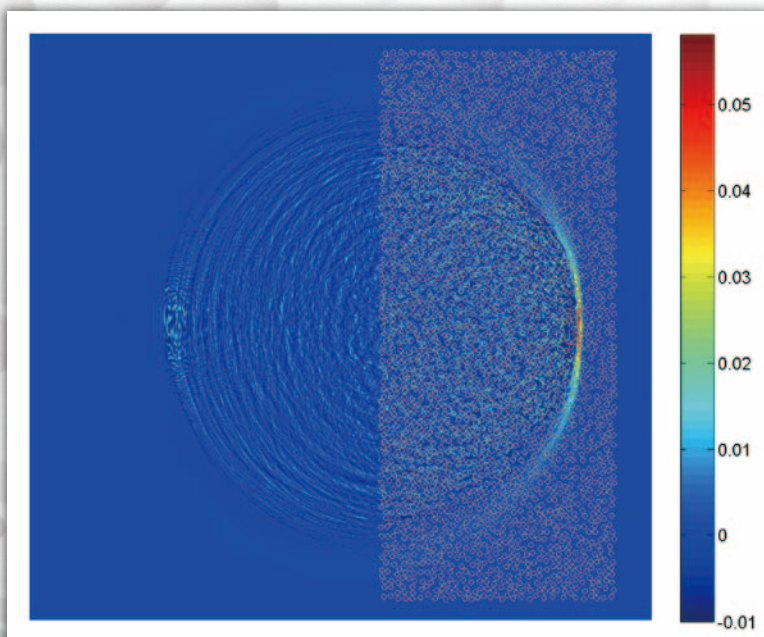


圖 10 虛擬光學實驗 (Virtual Optics) 可以用來精確分析光經過複雜結構的多次散射現象





「計算科學」是門龐大的學問，在各個不同的學科都有廣泛的應用。近年來快速的發展，產生了許多新的應用、前所未有的研究領域。有的學問困難的問題經過許多年、許多人的努力，已經漸漸研究透徹，然而，「計算科學」才剛剛起步，更令人振奮的是，電腦的計算能力正在快速成長：昨日難以計算的題目，明日很可能彈指之間就能完成。最近聽了一個優秀前輩孟懷縈* 院士的演講，給我很大的啟發，我在此轉述她的話語，希望也能給各位一些發想：「…，以前人類的研究方法不外乎兩種：理論推導（theoretical derivation based on reductionism）與實驗探索（experimental exploration based on controlled environment），…，然而今天各位，你們有了一個新的選擇：『Computational Thinking！』現在，你們很幸運地出生在這個時代，可以使用前所未有的科技（計算機），研究極其複雜、多變因的問題，你們可以處理分析大量的數據，並嘗試各式各樣的新構想！這都是沒有電腦的先賢所沒有的優勢，you are only limited by your 好奇心與創造力！」

* 註：孟懷縈（孟懷縈（英文名：Teresa H. Meng，1961年—），原籍台灣的美國科學家與企業家，中華民國中央研究院院士、美國國家工程學院院士，IEEE Fellow，史丹佛大學電機系講座教授，Atheros 通訊公司創辦人，以領導分散式無線網路技術發展而最為知名。）

孟懷縈院士：

- 科學研究方法：
 - 理論推導 based on reductionism
 - 實驗探索 based on controlled environment
 - Computational thinking!
 - complexity, uncertainty, data analysis & ideas
 - problem domain and solution domain only
 - limited by 好奇心 and 創造力~

圖 11 孟懷縈院士：「科學研究的方法：理論推導、實驗探索，以及『Computational thinking!』」

